Korespondenční Seminář z Programování

31. ročník **KSP** **Březen 2019**

Milí řešitelé, řešitelky a řešitelčata!

Právě držíte v rukou leták s řešeními úloh třetí série. Pojďte se podívat, jak se daly řešit úlohy, které jsme si na vás vymysleli.

Připomínáme, že od letoška jsou řešení každé série rozdělena na dvě části: na samotná autorská řešení, která vydáváme brzy po termínu série a jejichž třetí várku najdete v tomto letáku, a na komentáře k došlým řešením, která vydáváme až po opravení vašich řešení.

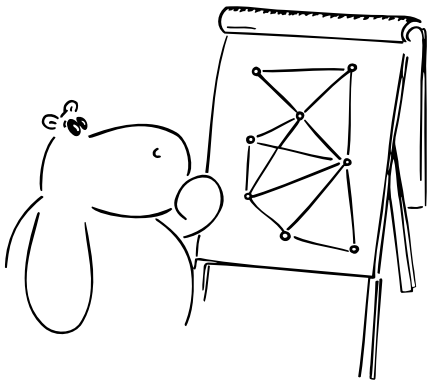
Pokud se vám cokoliv nezdá nebo máte nějaký dotaz, neváhejte se ozvat na našem fóru nebo emailem na známou adresu.

Vzorová řešení třetí série třicátého prvního ročníku KSP

31-3-1 Shánění látky

Efektivní řešení této úlohy sice bude spočívat v nějaké předpočítané struktuře, ale pojďme se pro začátek podívat, jak by se dala úloha vyřešit bez předvýpočtu, jenom pro jediný vstup. Máme tradiční ohodnocený graf, potřebujeme v něm najít co nejlevnější cesty do speciálních vrcholů a pak si vybrat vrchol a cestu, které nás v součtu vyjdou nejvýhodněji.

Asi už znáte Dijkstrův algoritmus na hledání nejkratší cesty. To, jestli hledáme nejlevnější, nebo časově nejkratší cestu, nás nemusí trápit, algoritmu je jedno, jak budeme říkat „váze“ hran. Podstatné je, že nám najde cestu s minimálním součtem cen. Pak můžeme jednoduše spustit Dijkstru pro každý obchod, spočítat si, kolik nás bude celkem stát látka i s cestou, a pak najít minimum v seznamu.



Protože ale prohledáme graf pro každý obchod, dostaneme se alespoň na kvadratickou složitost. Prohledávání grafu Dijkstrovým algoritmem ale děláme pořád dokola ze stejného výchozího vrcholu, což se dá poměrně jednoduše všechno sloučit do jednoho běhu. Dijkstrův algoritmus totiž v první fázi stejně prochází postupně vrcholy od nejbližšího po nejvzdálenější a přiřazuje jim vzdálenosti. Takže ho spustíme z výchozího vrcholu a vytáhneme si vzdálenosti ke všem vrcholům. To nám zabere $\mathcal{O}((N+M)\log N)$ času, kde N je počet vrcholů a M počet hran, a získáme tím vzdálenostní mapu, kterou budeme moct používat pro každý další dotaz.

Když máme pro každý obchod informaci, kolik stojí cesta a kolik stojí látka, tak stačí všechny lineárně projít, spočítat celkovou cenu a určit minimum. Dostali jsme se tím na $\mathcal{O}((N+M)\log N)$ času na inicializaci plus $\mathcal{O}(N)$ na každý dotaz.

Lepší vyhledávání

Můžeme však přepočítané ceny v obchodech ještě chytře uspořádat, abychom v nich mohli binárně vyhledávat. Pro začátek si setřiďme sestupně pole s obchody podle ceny za jednotku. Platí totiž, že když se nám pro nějaké množství látky vyplatí nakoupit za cenu C_1, tak pro větší množství látky se vyplatí jednotková cena $C_2 \geq C_1$. Kdyby se nám totiž po zvednutí množství látky vyplatilo najednou nakoupit u nějakého obchodníka s vyšší sazbou, tak musí být blíž, a tak není důvod u něj nenakoupit už předtím. I když si je ale setřídíme podle jednotkové ceny, tak se v seznamu binárně hledat nedá, protože vzdálenosti můžou být úplně různé a tedy i celkové ceny.

Protože ale víme, že se zvyšujícím se množstvím látky se postupně posouváme k obchodníkům s menší sazbou, můžeme si předpočítat pro každého obchodníka, v jakém intervalu množství se nám vyplatí využít jeho služeb. Udělat se to dá postupným načítáním – nejdříve si vezmeme obchodníka s nejhorší sazbou a budeme prozatím předpokládat, že se nám vyplatí u něj nakoupit vždy. Pak vezmeme dalšího v pořadí a buď je nový obchodník výhodnější vždy, nebo najdeme bod, kdy jsou stejně drazí. Pokud je nový obchodník výhodnější ve všech případech (na celém intervalu, kde byl výhodný ten předchozí), tak toho předchozího úplně odebereme. Pokud ne, tak vezmeme ten bod, kde jsou stejně drazí, ukončíme interval předchozího obchodníka a začneme interval toho nového. Bod, kde se rovnají ceny, najdeme vyřešením jednoduché lineární rovnice $d_1 + c_1 \cdot x = d_2 + c_2 \cdot x$, což vyjde $x = (d_1 - d_2)/(c_2 - c_1)$

Ve zjednodušeném kódu by mohla tato logika vypadat asi takto:

```
while True:
    stará cena = d2 + c2 * začátek intervalu
    aktální cena = d1 + d2 * začátek intervalu

    if stará cena < aktuální cena:
        break

    result.pop()

začátek intervalu = (d_1 - d_2)/(c_2 - c_1)
result.push(začátek intervalu, obchod)
```

Pokud byste radši verzi, která řeší okrajové případy a dá se spustit, tak se můžete podívat do přiloženého programu.

Zbývá nám dořešit, jak v seznamu hledat a jakou to má složitost. Protože při výpočtu si spočítáme, od jakého místa se nám vyplatí využít daného obchodníka, stačí si tyto hranice zapsat do pole a pak v nich binárně vyhledávat nejbližší menší hranici. Pokud máte nějakou oblíbenou da-

tovou strukturu na hledání nejbližšího menšího prvku, tak ji samozřejmě můžete taky použít.

Časově nás předpočítání vyjde na $\mathcal{O}((N + M) \log N)$, kde N je počet vrcholů a M počet hran. Nejříve je potřeba jednou mapu prohledat Dijkstrovým algoritmem, pak najít, jak daleko jsou obchody, setřídit si je a nakonec je všechny projít a sestavit z nich seznam intervalů. Jediný zádrhel je, že při sestavování také v cyklu odebíráme předchozí nevýhodné nabídky, takže to nemusí být hotové v konstantním čase na operaci. Stačí si ale uvědomit, že v každém průchodu přidáváme jen jeden nový interval a víckrát ho určitě odebírat nebudeme. Dohromady se to tedy také posčítá na $\mathcal{O}(N)$ času. Navíc je dobré, že na celý předvýpočet nám stačí lineárně paměti. V datové struktuře, kterou si držíme celou dobu, máme uložené jen obchody, které můžou být v nějaké situaci výhodné, což by v praxi asi byla docela malá část. Jedno vyhledání binárním vyhledáváním bude (nepříliš překvapivě) trvat $\mathcal{O}(\log N)$.

Program (Rust):
`http://ksp.mff.cuni.cz/viz/31-3-1.rs`

Standa Lukeš

31-3-2 Cennější náhrdelník

Termín této úlohy jsme kvůli nejasnosti v zadání posunuli až na 11. března. Její řešení se zde objeví krátce poté.

31-3-3 Přebírání hrachu

Pro každou z bílých figurek chceme zjistit, zda je ohrožována aspoň jednou černou. Můžeme zkusit vyzkoušet pro každou dvojici bílé a černé figurky, zda se ohrožují. Těchto dvojic je ovšem až kvadraticky mnoho a navíc se nám může stát, že i když by se dvojice ohrožovala, tak se mezi nimi nachází další figurka, která černé figurce z naší dvojice překáží ve výhledu a znemožňuje jí bílou figurku sebrat. Protože ověřit, zda dvojici nepřekáží ve výhledu další figurka, trvá lineárně dlouho, toto řešení je $\mathcal{O}(n^3)$.

Jelikož černé figurky jsou pouze věže a střelci, bílé figurky mohou být ohroženy pouze z dohromady osmi směrů, kterými se černé dokážou pohybovat. Řešení můžeme vylepšit tím, že budeme zjišťovat, zda je bílá figurka ohrožena, pro každý směr zvlášť. Například pokud chceme pro každou bílou figurku zjistit, zda je ohrožena zleva nebo zprava, stačí nám uvažovat pouze ty figurky, které leží na stejném řádku. Navíc každá figurka má na svém řádku nejvýše dva sousedy, jednoho zleva, druhého zprava. Stačí nám uvažovat jen tyto sousedy, protože budou všem ostatním figurkám na řádku překážet ve výhledu. Pro každou z lineárně mnoho bílých figurek tedy v lineárním čase najdeme ty figurky, které s nimi sdílí řádek (pro ostatní směry ty, které sdílí sloupec či diagonálu), v lineárním čase najdeme mezi nimi dva nejbližší sousedy bílé figurky a pro ty vyzkoušíme, zda figurku neohrožují, to jest zda se jedná o černé figurky a jestli jsou typu, který se umí v tomto směru pohybovat. Celkově je toto řešení $\mathcal{O}(n \cdot (n + n))$, tedy $\mathcal{O}(n^2)$.

Abychom uměli rychle zjistit, které figurky leží na stejném řádku, můžeme si nejprve všechny figurky seřadit podle jejich souřadnice řádku. V seřazeném seznamu figurek leží figurky na stejném řádku vedle sebe. Pokud bychom navíc vzali všechny figurky na stejném řádku a seřadili je podle souřadnice sloupce a uložili do nějakého pole, budeme je mít uspořádané v tom pořadí, v jakém leží na řádku za sebou. Pro libovolnou figurku na řádku tedy umíme najít její sousedy prostě tak, že se podíváme v tomto uspořádaném poli na index o jedna nižší a o jedna vyšší.

Tato dvě setřízení můžeme provést zároveň. Primárně figurky setřídíme podle souřadnice řádku, sekundárně pak podle souřadnice sloupce. Takové uspořádání, kde třídíme primárně podle jednoho kritéria a sekundárně podle jiného, se nazývá *lexikografické*. Nyní nám stačí projít setřízené pole a pro každou bílou figurku se podívat na její dva sousedy a rozhodnout, zda ji neohrožují. Také musíme dát pozor na to, že sousední figurky v setřízeném poli figurek se nemusí nacházet na stejném řádku. Pokud je soused bíle figurky na jiném řádku, znamená to, že v daném směru se už na stejném řádku nenachází žádné figurky. Také si všimněme, že tímto uspořádáním najdeme všechny takové figurky, které bíle ohrožují ne jen z jednoho směru z osmi, ale ze dvou (zprava i zleva).

Kompletní řešení pro každou ze čtyř „os“ (doleva-doprava, nahoru-dolů, diagonálně doprava nahoru, diagonálně doprava dolů) lexikograficky figurky uspořádá, uspořádané pole v lineárním čase projde a pro každou bílou figurku určí, zda je ohrožována. Toto řešení má tedy časovou složitost $\mathcal{O}(n \log n)$.

Program (C):
`http://ksp.mff.cuni.cz/viz/31-3-3.c`

Kuba Pelc

31-3-4 Dláždění sálu

Úloha je nápadně podobná 31-Z2-6. V začátečnické verzi jsme se ale ptali na *jednořádková dláždění* – v řeči naší nynější úlohy tedy bylo $K = 1$. Navíc jsme neměli zadanou horní a dolní barvu, protože to u jednořádkové verze není zajímavé.

Převod na jednořádkovou verzi

Ukážeme, že úloha s obecným K se dá na případ $K = 1$ převést. Předvedeme, jak z každého zadání úlohy (barva stěn plus sada dlaždic) vyrobíme nějaké jiné zadání tak, aby v nové úloze šel vydláždit sál $1 \times N$ právě tehdy, když v té staré jde vydláždit sál $K \times N$.

Barvy můžeme rozdělit na „vodorovné“ a „svislé“ (vodorovné se nacházejí na levé a pravé straně dlaždiček, svislé na horní a dolní; oba druhy barev spolu nijak neinteragují). Svislé barvy v nové úloze budou stejné jako v původní. Nové vodorovné barvy budou uspořádané K-tice starých barev (bude jich exponenciálně mnoho, ale to nám nevadí, protože složitost nás zajímá jen vzhledem k N).

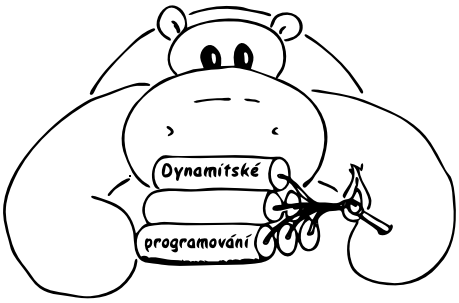
Nové dlaždičky budou odpovídat „sloupečkům“ K starých dlaždic pod sebou. Uvážíme všechny takové sloupečky, které na sebe správně navazují svislými barvami a navíc nejhořejší a nejdolejší svislá barva odpovídají barvě horní a dolní stěny. Pro každý takový sloupeček přidáme novou dlaždici, jejíž levá a pravá barva budou odpovídat K-ticím barev na levé a pravé straně sloupečku; na horní a dolní barvě vůbec nezáleží. Levá stěna v nové úloze bude obarvena K-ticí, která jen zopakuje barvu staré levé stěny. Podobně pro pravou stěnu.

Korektní dláždění v nové úloze tedy bude odpovídat korektnímu dláždění v té staré, přičemž každá dlaždička nového dláždění bude kódovat sloupec K dlaždiček ve starém. Pro úplnost dodejme, že pro B barev mohlo vzniknout až B^{2K} nových dlaždic, ale to je vzhledem k N konstanta.

Dynamické programování

Úlohu jsme úspěšně přeložili na jednořádkovou, takže můžeme rovnou aplikovat vzorové řešení 31-Z2-6. Pro úplnost ho převyprávíme.

Použijeme dynamické programování. Postupně budeme pro $i = 0, \ldots, N$ počítat množiny S_i barev, kterými může končit dláždění nejlevějších i políček sálu. Množina S_0 evidentně obsahuje jen barvu levé stěny. A kdykoliv známe S_{i-1}, můžeme snadno sestrojit S_i: barvu b tam dáme, pokud existuje dlaždice, která má napravo barvu b a nalevo nějakou barvu z S_{i-1}. Až spočítáme množinu S_N, stačí se podívat, zda v ní leží barva pravé stěny. Hotovo.



Jelikož počet barev a počet dlaždic považujeme za konstanty, každou S_i dokážeme spočítat v konstantním čase. Celkem tedy tento algoritmus pracuje v čase $\mathcal{O}(N)$.

Pokud nás zajímá i to, jak nějaké korektní dláždění vypadá, můžeme ho sestrojit zpětným průchodem (to je u dynamického programování obvyklý trik). Pokud dláždění existuje, leží barva pravé stěny p_N v S_N. Jak se tam dostala? Musela existovat nějaká dlaždice, která má napravo barvy p_N a nalevo nějakou barvu $p_{N-1} \in S_{N-1}$. Podobně získáme předposlední dlaždici: ta má napravo p_{N-1} a nalevo $p_{N-2} \in S_{N-2}$. A tak dále, až v lineárním čase rekonstruujeme celé dláždění.

Logaritmické řešení

Pokud nám stačí zjistit existenci dlázdění, jde to i rychleji. Ukážeme, jak úlohu vyřešit v čase $\mathcal{O}(\log N)$. Nejprve si ji ale trochu zkomplikujeme: místo konkrétní barvy levé stěny budeme uvažovat všechny možné barvy. Místo S_i budeme počítat množiny $S_{b,i}$: v nich budou ležet ty barvy, kterými může končit dláždění šířky i, jež začíná barvou b.

Ukážeme, že pokud komplikovanější úlohu umíme vyřešit pro sály šířek i a j, půjde to také pro sál šířky $i + j$. To znamená, že známe-li $S_{b,i}$ a $S_{b,j}$ pro všechny barvy b, dovedeme z toho spočítat $S_{b,i+j}$ pro všechny b. Chceme-li znát $S_{b,i+j}$, stačí totiž rozebrat všechny možné barvy c, kterými může končit prvních i dlaždic: ty už známe z $S_{b,i}$. Pro každou barvu c pak zjistíme, jakými barvami může končit dalších j dlaždic: ty najdeme v množině $S_{c,j}$. Formálně řečeno:

$$S_{b,i+j} = \bigcup_{c \in S_{b,i}} S_{c,j}.$$

Tento výpočet nám (vzhledem k N) trvá konstantní čas.

Tímto způsobem můžeme v čase $\mathcal{O}(\log N)$ spočítat všechna $S_{b,2^k}$ pro $2^k \leq N$: zjistit $S_{b,1}$ je triviální (to jsou prostě všechny pravé barvy dlaždic, které mají nalevo b) a pak budeme vždy z $S_{b,2^k}$ počítat $S_{b,2^{k+1}} = S_{b,2^k+2^k}$.

Pokud je N mocnina dvojky, máme vyhráno. Jinak si N zapíšeme jako součet navzájem různých mocnin dvojky (to je vlastně zápis čísla N ve dvojkové soustavě). Stačí tedy spočítat všechna $S_{b,2^k}$ a z nich pak $S_{b,N}$ naším „součtovým pravidlem“ poskládat. To také potrvá $\mathcal{O}(\log N)$.

Program (Python 3):
`http://ksp.mff.cuni.cz/viz/31-3-4.py`

Násobení matic

Předchozí algoritmus působí dojmem ad hoc triku pro konkrétní úlohu. Ve skutečnosti se na něj dá přijít systematičtěji, ale potřebujeme na to umět násobit matice.

Uvažujme nula-jedničkovou matici $\mathbf{M}$ tvaru $B \times B$ (připomínáme, že B je počet barev), která má na pozici b, c jedničku, existuje-li dlaždice s barvou b nalevo a barvou c napravo.

Dále zvolme B-složkový řádkový vektor $\mathbf{x}$ (indexovaný barvami), který je všude nulový, jen složka odpovídající barvě levé stěny je rovna 1. Pokud tento vektor vynásobíme zprava maticí $\mathbf{M}$, dostaneme nějaký řádkový vektor $\mathbf{y} = \mathbf{xM}$ o B složkách. Z definice násobení matic víme, že $\mathbf{y}_j = \sum_i \mathbf{x}_i \mathbf{M}_{ij}$. Všimněte si, že $\mathbf{y}_j$ nám říká, kolik existuje dlaždic, které mají nalevo barvu levé stěny a napravo barvu j. Pokud tento vektor opět vynásobíme zprava maticí $\mathbf{M}$, řekne nám j-tá složka počet způsobů, jak vydláždit sál šířky 2 tak, aby končil barvou j.

Takto pokračujeme N-krát a získáme vektor $\mathbf{xM}^N$, který nám pro každou pravou barvu řekne, kolik existuje dláždění sálu $1 \times N$ končících touto barvou. Pak se stačí podívat na složku indexovanou barvou pravé stěny sálu a pokud je nenulová, korektní dláždění celého sálu existuje.

Jelikož násobení matic je asociativní, mocninu $\mathbf{M}^N$ můžeme spočítat pomocí $\mathcal{O}(\log N)$ maticových násobení. Třeba tímto rekurzivním algoritmem: $\mathbf{M}^{2i} = (\mathbf{M}^i)^2$, $\mathbf{M}^{2i+1} = (\mathbf{M}^i)^2 \cdot \mathbf{M}$. To je logaritmické, protože v každém kroku rekurze exponent vydělíme aspoň dvěma.

Matice $\mathbf{M}$ je navíc konstantně velká, takže každé maticové násobení proběhne v konstantním čase. Stačí tedy v čase $\mathcal{O}(\log N)$ spočítat N-tou mocninu matice, pak ji vynásobit vektorem $\mathbf{x}$ a z výsledku vybrat správnou složku. To všechno stihneme v logaritmickém čase.

Zbývá detail: Našemu algoritmu sice stačí logaritmický počet operací, ale vznikají v něm ohromná čísla, takže bychom nejspíš neuspěli s tvrzením, že s těmito čísly umíme počítat v konstantním čase na operaci. Tomu ovšem snadno předejdeme – jelikož nás zajímá jen nenulovost výsledku, stačí po každém násobení matic ze všech nenul udělat jedničky. Tak zaručíme, že mezivýsledky nikdy nebudou větší než N.

Martin „Medvěd“ Mareš

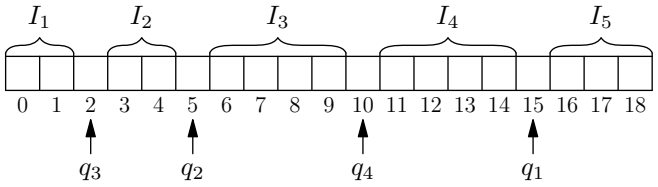
31-3-5 Hledání princezny

Hledáme v setříděné posloupnosti, to si vyloženě říká o to použít něco jako binární vyhledávání.[1] Ale bude ho potřeba trochu upravit. V klasickém binárním vyhledávání bychom poslali dotaz doprostřed pole a podle jeho výsledku se rozhodli, kam udělat další.

Situace v naší úloze je trochu odlišná: zatímco čekáme na výsledek prvního dotazu, můžeme dělat další. Přesněji řečeno můžeme udělat K dotazů, než se *vůbec něco* dozvíme. O tom, na kterých K prvků se na začátku zeptat, se tedy musíme rozhodnout zcela nezávisle na vstupu.

[1] `http://ksp.mff.cuni.cz/viz/kucharky/zakladni`

Označme si $q_1, q_2, \ldots, q_K$ indexy v poli, na které se ptáme prvními K dotazy:

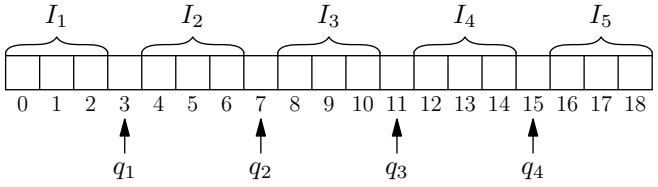


Místa dotazů nám rozdělí pole na intervaly $I_1, \ldots, I_{K+1}$. Po vyhodnocení všech K dotazů budeme vědět, ve kterém z těchto intervalů hledané číslo leží. Výsledky jednotlivých dotazů se dozvídáme dřív, ale to prozatím ignorujme a počkejme si, než doběhne všech K.

Poté můžeme další hledání omezit jen na interval I_c, ve kterém leží hledané číslo. V něm pak vyhledáváme rekurzivně stejným postupem, podobně jako u binárního vyhledávání.

Chtěli bychom, aby se velikost prohledávaného intervalu co nejvíc zmenšila, protože od rychlosti jejího zmenšování se odvíjí počet kroků potřebných k nalezení konkrétní hodnoty.

Protože jako informatiky nás zajímá složitost v nejhorším případě, musíme předpokládat, že budeme mít smůlu a číslo bude v největším z intervalů. Chceme tedy, aby největší interval byl co nejmenší. Toho dosáhneme, když budou intervaly (přibližně) stejně velké:



Pak budou mít všechny intervaly velikost $(N-K)/(K+1)$ (pokud to nevyjde celočíselně, některé budou o 1 větší), což je $\mathcal{O}(N/K)$. V každé fázi (*fáze* je jedno zmenšení intervalu pomocí K dotazů) zmenšíme prohledávaný interval $\Omega(K)$-krát. Budeme tedy mít $\mathcal{O}(\log_K N) = \mathcal{O}(\log N / \log K)$ fází a jedna fáze trvá $2K-1$ hodin. Tím dostáváme složitost $\mathcal{O}\left(\log(N) \cdot \frac{K}{\log K}\right)$.

Důkaz optimality

Pojďme si rozmyslet, že lépe to nejde (důkaz je trochu trikový a v řešení ho rozhodně požadovat nebudeme).

Nejprve si trochu upravíme výpočetní model: představme si, že odpověď na dotaz nedostaneme po K hodinách, ale v nejbližším čase, který je násobkem K. Tedy v každém z časů K, $2K$, $3K$, … dostaneme odpověď na všechny dosud položené dotazy.

Tím jsme si určitě pomohli, protože žádný dotaz nebude trvat déle než K hodin, ale některé budou rychlejší. Stále smíme položit jen jeden dotaz za hodinu.

Namísto postupného kladení jednoho dotazu za hodinu si můžeme představit, že položíme celou sadu K dotazů najednou a za K hodin se na ně dozvíme odpověď. Potřebný čas je pak K krát počet sad dotazů, které položíme.

Rozmyslete si, že každý program řešící původní zadání můžeme jednoduše upravit tak, aby fungoval tímto způsobem (pokládal dotazy v sadách velikosti K), aniž bychom zhoršili jeho složitost.

A nyní ukážeme, že k takto upravenému programu jde sestrojit vstup, na který bude potřebovat $\Omega(\log(N) \cdot \frac{K}{\log K})$ hodin času.

Hledání takového vstupu popíšeme jako hru pro dva hráče, ve které jedním hráčem bude náš algoritmus a druhým bude protivník. Na začátku si vybereme N a K a hledané číslo, třeba 0. Pak necháme algoritmus normálně běžet, ale namísto toho, abychom všechny dotazy zodpovídali porovnáním hledaného čísla s prvkem nějaké zadané vstupní posloupnosti, bude je zodpovídat protivník. Hráči se střídají: algoritmus položí sadu K dotazů, protivník je zodpoví, algoritmus položí další sadu, …

Protivník žádnou konkrétní posloupnost vymyšlenou nemá, může na každý dotaz odpovědět, jak se mu zlíbí. Musí však dodržet dvě podmínky:

1. Všechny odpovědi za celou hru musí být konzistentní. Nemůže například říct, že hledané číslo je větší než pátý prvek, a později, že menší než třetí.
2. Po skončení hry musí vydat posloupnost čísel takovou, že pokud by byla vstupem, všechny odpovědi na dotazy, které dal, budou pro tuto posloupnost správné.

Všimněte si, že pokud jsou tyto podmínky splněny, bude průběh algoritmu na vstupu vygenerovaném protivníkem stejný jako průběh při hře. Protože při skutečném zpracování vstupu položí algoritmus v první sadě stejné dotazy jako ve hře (první sada nemůže záviset na vstupu) a dostane stejné odpovědi (dle 2. podmínky výše). Díky tomu položí ve druhé sadě stejné dotazy jako při hře, atd.

Z toho plyne, že časová složitost algoritmu na tomto vstupu bude stejná jako délka hry samotné. Protivník se tedy snaží, aby hra trvala co nejdéle.

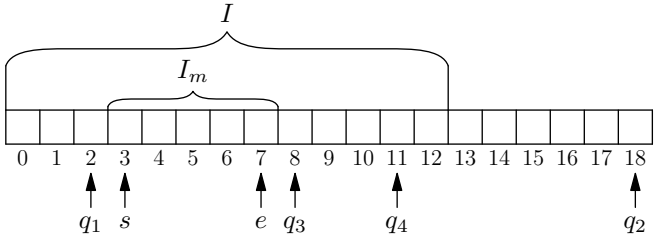
Nyní popíšeme strategii protivníka. Jeho cílem je vygenerovat posloupnost tvaru

$$\{-1, -1, \ldots, -1, 0, 1, 1, \ldots, 1\},$$

přičemž umístění nuly si během hry vybere. Přesněji řečeno, bude si průběžně udržovat interval, do kterého může nulu umístit (*aktivní interval*) – na začátku to bude interval $[0, N-1]$.

Kdykoli algoritmus položí sadu dotazů, ignorujeme ty, co jsou mimo aktivní interval. Ty, které leží v aktivním intervalu, nám jej rozdělí na nejvýše $K+1$ podintervalů, jak už jsme si ukazovali výše.

Označme si I_m největší z těchto podintervalů, s a e jeho začátek a konec, ℓ jeho délku a I dosavadní aktivní interval a L jeho délku:



Nyní pro všechny dotazy s $q_i < s$ protivník odpoví „menší než hledané číslo“, pro dotazy s $q_i > e$ odpoví „větší než hledané číslo“, mezi s a e žádné být nemůžou. Nakonec změní aktivní interval na (s, e), to bude nové I v příštím kroku. Protože nulu nakonec umístí někam do intervalu (s, e), všechny vydané odpovědi budou správné.

Určitě platí $\ell \geq (L - K)/(K + 1)$. Kdyby všechny podintervaly byly menší než tato hodnota, byla by jejich celková délka menší než $L - K$, což nemůže, protože spolu s K dotazovanými políčky tvoří celý interval I.

Hra skončí, když algoritmus položí sadu dotazů pokrývající celé I (nutnou podmínkou k tomu je $L \leq K$ před touto sadou). Pak protivník umístí nulu na libovolné místo v I, zkonstruuje celý vstup doplněním jedniček napravo a mínus jedniček nalevo a všechny dotazy zodpoví pravdivě.

Nyní bychom mohli zamáchat rukama a říct, že v ideálním případě se aktivní interval za jednu sadu dotazů zmenší řádově K-krát, takže potřebujeme $\log_K(N)$ sad. Pokud se bude méně zmenšovat, budeme jich potřebovat ještě víc.

Ale pokud to chceme ukázat poctivě, je třeba ještě trocha počítání. Pro $L \geq 2K$ platí:

$$\ell \geq \frac{L-K}{K+1} \geq \frac{L}{2K+2} \geq \frac{L}{4K}.$$

Tedy aby se L zmenšilo z N na $2K$ nebo méně, potřebujeme $\log_{4K} \frac{N}{2K}$ kroků. Dál odhadneme:

$$\log_{4K} \frac{N}{2K} = \frac{\log N}{\log 4K} - \frac{\log 2K}{\log 4K} \geq \frac{\log N}{\log 4K} - 1 = \Theta\left(\frac{\log N}{\log K}\right)$$

Tedy hra potrvá alespoň $\Omega(\log N / \log K)$ sad dotazů, kde na každou čekáme K hodin, tedy celkem $\Omega\left(\log(N) \cdot \frac{K}{\log K}\right)$ hodin. To je dle argumentu výše dolní odhad na časovou složitost libovolného algoritmu řešícího úlohu.

Filip Štědronský

31-3-6 Model–ViewController

Termín odevzdání seriálu je až 11. března, řešení zde zveřejníme až po tomto datu.